PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

例題

(1)　次の 2 つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(i)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(ii)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 2 つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ。また，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

第10講　PART4 確認問題

1 $\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(-3,\ 5)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ アイ である。

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$\theta=$ ウエ $^\circ$ である。

2 $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ -6)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値は，$x=$ オ である。

3 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 4)$，$\vec{x}=(-4,\ t)$ のとき，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値は，

$t=$ カキ ，ク である。

PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

例題

(1)　次の２つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(i)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(ii)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

(1)(i)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+5\times3=13$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=45^\circ$

(ii)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-1)+2\times2=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より　$\theta=90^\circ$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるのは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき

よって　$(-6)\times2+2\times x=0$　より　$x=6$

また

$$\vec{a}+\vec{b}=(-4,\ 2+x),\quad \vec{a}-\vec{b}=(-8,\ 2-x)$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ のとき

よって

$$(-4)\times(-8)+(2+x)(2-x)=0\qquad x^2=36\qquad x=\pm6$$

練習

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(5,\ 2)$, $\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ。また，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\sqrt{3})\times1+1\times(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるのは $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ のとき

よって

$2\times(t-2)+(-1)\times4=0$ より　$t=4$

$\vec{x}+\vec{a}=(t,\ 3)$, $\vec{x}-\vec{b}=(t-7,\ 2)$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ のとき

よって

$t\times(t-7)+3\times2=0$　　$t^2-7t+6=0$　　$(t-1)(t-6)=0$　　$t=1,\ 6$

第 10 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：17，ウエ：45

[解説]

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-3)+4\times5$$ [A]

$$=\mathbf{17}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ [B]

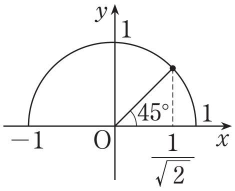
$$=\frac{17}{\sqrt{1^2+4^2}\sqrt{(-3)^2+5^2}}$$

$$=\frac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は

$$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$$



[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

[B]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

2

[正解] オ：9

[解説]

$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ [C]

よって

$$2\times x+3\times(-6)=0$$

$$\boldsymbol{x=9}$$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

3 **[正解]** カキ：-1，ク：3

[解説]

$$\vec{x}+\vec{a}=(-4,\ t)+(3,\ 2)$$
$$=(-1,\ t+2)$$
$$\vec{x}-\vec{b}=(-4,\ t)-(1,\ 4)$$
$$=(-5,\ t-4)$$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直のとき

$$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$$ [D]

よって

$$(-1)\times(-5)+(t+2)(t-4)=0$$
$$t^2-2t-3=0$$
$$(t+1)(t-3)=0$$
$$\boldsymbol{t=-1,\ 3}$$

[D]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$